

Kapitel 6

DIFFERENTIATION

Fassung vom 22. Februar 2002

6.1 Ableitung

Die wichtigste Anwendung des Grenzwertbegriffs besteht in der Erlahrung und Behandlung der *aktuellen Veränderungsrate*. Als Einführung betrachten wir

BEISPIEL 1 Das Gesetz von Weber-Fechner Ein Reiz der Intensität I , verursacht z.B. durch Schall oder mechanischen Druck, Licht oder chemische Preparate bewirkt bei einem Lebewesen eine Reaktion (oder Empfindung) $R(I)$. Nimmt I um einen festen Wert h zu, so wächst $R(I)$ umso weniger, je größer I ist (Husten im Rockkonzert oder während der Pianostelle einer Gesangsarie wird unterschiedlich laut empfunden). Messungen haben gezeigt, daß der Zuwachs von $R(I)$ für kleine h annähernd proportional zum relativen Zuwachs von I , also

$$R(I+h) - R(I) \simeq a \cdot \frac{h}{I}.$$

Für die *mittlere Veränderungsrate* von R gilt also

$$\frac{R(I+h) - R(I)}{h} \simeq \frac{a}{I},$$

und zwar mit zunehmender Genauigkeit, wenn h kleiner wird.

Ein mathematisches Modell, welches die Meergergebnisse möglichst gut wiedergibt, entsteht durch Grenzübergang h gegen Null. Man sagt, daß

$$R'(I) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(I+h) - R(I)}{h}$$

die *aktuelle Veränderungsrate* ist und erhält

$$R'(I) = \frac{a}{I}.$$

Dies ist eine Gleichung für die unbekante Funktion R . Man spricht von einer *Differentialgleichung*. Später werden wir aus der Differentialgleichung und aus einer *Anfangsbedingung*, etwa $R(I_0) = 0$, wobei I_0 eine Reizschwelle ist, die Funktion R bestimmen.

BEMERKUNG 1 Bei zeitabhängigen Prozessen $t \mapsto f(t)$ nennt man

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

auch *mittlere Wachstumsrate* oder die *mittlere Geschwindigkeit* und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

die *momentane Wachstumsrate* oder *momentane Geschwindigkeit* .

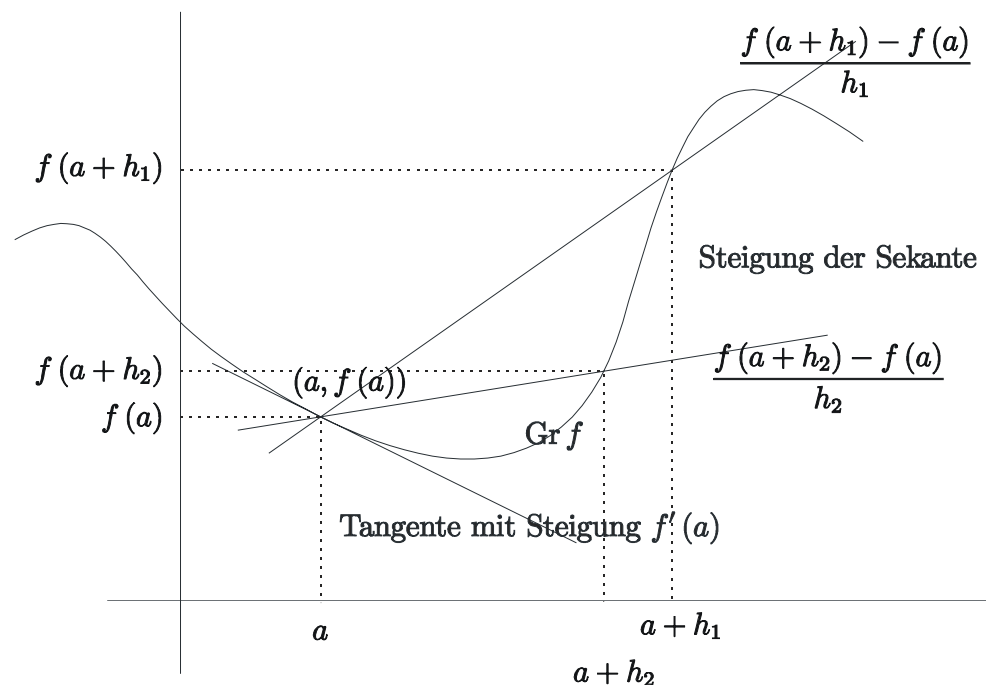
Mathematisch definiert man:

DEFINITION Eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, wenn für jedes $a \in D_f$ der eigentliche Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert. $f'(a)$ oder $\frac{df}{dx}(a)$ heißt dann die *Ableitung* von f im Punkte a .

BEMERKUNG 2 Wichtig ist die geometrische Interpretation der Ableitung, die man aus der Skizze abliest: Die *Tangentensteigung* $f'(a)$ ist (definitionsgemäß) der Grenzwert der *Sekantensteigungen*.



SATZ Ist f differenzierbar, so ist f stetig.

Es ist

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h + f(a) \right] = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a) .$$

BEISPIEL 2 Ein Körper wird zur Zeit $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 15 \text{ m sec}^{-1}$ senkrecht nach oben geworfen. Bezeichnen wir mit $f(t)$ den zur Zeit t zurückgelegten Weg und ist $f(0) = 0$, so gilt nach dem Fallgesetz

$$f(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 ,$$

wobei $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ die Erdbeschleunigung ist. Für die mittlere Geschwindigkeit = $\frac{\text{Wegdifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{v_0 \cdot (t+h) - \frac{g}{2} \cdot (t+h)^2 - (v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2)}{h} = \\ &= \frac{v_0 \cdot h - g \cdot t \cdot h - \frac{g}{2} \cdot h^2}{h} = v_0 - g \cdot t - \frac{g}{2} \cdot h, \end{aligned}$$

also

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = v_0 - g \cdot t - \frac{g}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = v_0 - g \cdot t.$$

Die maximale Höhe ist erreicht, wenn die Geschwindigkeit Null ist, d.h. zur Zeit τ mit $f'(\tau) = 0$. Es muß also gelten $v_0 - g \cdot \tau = 0$ oder

$$\tau = \frac{v_0}{g}.$$

Die maximale Höhe H ist demnach

$$H = f(\tau) = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} \simeq 11.5 \text{ m}.$$

6.2 Berechnung von Ableitungen

Wie bei den Grenzwerten, lassen sich Ableitungen häufig mit Hilfe von Standardbeispielen und Rechenregeln berechnen. Wegen der speziellen Struktur der Grenzwerte $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ ergeben sich hierfür auch spezielle Rechenregeln.

Die Ableitung der wichtigsten Standardfunktionen ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Definitionsbereich	$f(x)$	$f'(x)$
\mathbb{R}	$c \quad (c \in \mathbb{R})$	0
\mathbb{R}	$x^n \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$	$n \cdot x^{n-1}$
$]0, \infty[$	$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a \cdot x^{a-1}$
\mathbb{R}	e^x	e^x
$]0, \infty[$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	$\cos x$	$-\sin x$
\mathbb{R}	$\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots\}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$] -1, 1[$	$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$] -1, 1[$	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
\mathbb{R}	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

HAUPTSATZ (Ableitungsregeln) *Es seien f und g differenzierbare Funktionen :*

(i) **Faktorregel**

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) .$$

(ii) **Summenregel**

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) .$$

(iii) **Produktregel**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) .$$

(iv) **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} , \quad g(x) \neq 0 .$$

(v) **Kettenregel**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) .$$

(vi) **Umkehrregel** Ist f^{-1} die Umkehrfunktion von f und ist $f'(x) \neq 0$, so ist

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{für } y = f(x)$$

oder

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} .$$

BEISPIEL 1 Sei $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$. Da $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ erhalten wir aus der Faktor- und Summenregel

$$P'(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 .$$

BEISPIEL 2 Wenden wir Faktor- und Summenregel formal auf die Exponentialreihe

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (e^x)' = \exp'(x) &= 0 + 1 + 2 \cdot \frac{x^1}{2!} + 3 \cdot \frac{x^2}{3!} + \dots + n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = \exp(x) . \end{aligned}$$

BEISPIEL 3 Für die Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$

$$x \mapsto a^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt nach Definition 3.3

$$a^x = e^{x \cdot \ln a} .$$

Aus der Kettenregel mit $f = \exp$ und $g : x \mapsto x \cdot \ln a$ folgt

$$(a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a ,$$

da $f' = \exp' = \exp$ und $g'(x) = \ln a$ gilt.

Dies zeigt nun auch die ausgezeichnete Bedeutung der Basis e : Unter allen Exponentialfunktionen ist die Gleichung $f' = f$ genau für $a = e$ erfüllt.

BEISPIEL 4 Analog bekommt man

$$\left(e^{-x^2}\right)' = [\exp(-x^2)]' = \exp'(-x^2) \cdot (-2x) = \exp(-x^2) \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2} .$$

BEISPIEL 5 Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x \neq 0$. Aus der Quotientenregel folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^n}\right)' &= \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot \frac{1}{x^{2n-n+1}} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = \\ &= -n \cdot x^{-n-1} . \end{aligned}$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt somit für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} .$$

BEISPIEL 6 Da \ln die Umkehrfunktion von \exp ist, gilt nach der Umkehrregel mit $y = \exp(x)$

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y} .$$

Wir erhalten also wieder das entsprechende Resultat aus der Tabelle.

BEISPIEL 7 Für die Funktionen $f(t) = c \cdot e^{at}$, die exponentielles Wachstum beschreiben (Solie 3.1), erhalten wir aus der Kettenregel

$$f'(t) = c \cdot e^{at} \cdot a = a \cdot f(t) .$$

Bei exponentiellem Wachstum ist also die *momentane relative Wachstumsrate* $\frac{f'(t)}{f(t)}$ konstant; der Faktor a im Exponent ist gerade diese relative Wachstumsrate.

BEISPIEL 8 Wir können nun auch Funktionen konkret angeben, die die Reaktion eines Lebewesens in Abhängigkeit von der Intensität I eines äußeren Reizes angeben. Im Beispiel 6.1.1 hatten wir dafür die Beziehung $R'(I) = \frac{a}{I}$ hergeleitet. Nach der Tabelle kann man "erraten", daß diese Differentialgleichung für

$$R(I) = R_0 + a \cdot \ln I$$

erfüllt ist. In der Tat ist

$$(R_0 + a \cdot \ln I)' = a \cdot \ln'(I) = \frac{a}{I} !$$

Bezeichnet man mit I_0 die Schwellenintensität, bei der die Reaktion einsetzt, d.h.

$$R(I_0) = 0 ,$$

so erhalten wir

$$0 = R(I_0) = R_0 + a \cdot \ln I_0 ,$$

also

$$R_0 = -a \cdot \ln I_0 .$$

Das Gesetz von Weber-Fechner lautet somit

$$R(I) = a \cdot \ln I_0 - a \cdot \ln I_0 = a \cdot \ln \frac{I}{I_0} .$$

Wegen dem werden Intensitäten häufig in einer logarithmischen Skala angegeben, z.B. die Schallintensität in *Dezibel*, abgekürzt in dB. Die Schwellenintensität I_0 beim Hören (bei einer Frequenz von 1000 Hz = 1000 Schwingungen pro Sekunde) ist ungefähr $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ und man sagt, die Intensität I beträgt

$$10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ dB} = 10 \cdot \log_{10} (10^{12} \cdot I) \text{ dB} .$$

6.3 Monotonie und Extrema

Das Vorzeichen der Ableitung einer Funktion f bestimmt weitgehend das Verhalten der Funktion: z.B. ist einsichtig, daß bei stets positiver Ableitung, also positiver Steigung der Tangente bzw. positiver aktueller Veränderungsrate, die Funktion streng monoton wachsend ist.

HAUPTSATZ (Monotoniekriterium) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt*

$$(i) \quad f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in I \iff f \text{ ist monoton wachsend.}$$

$$(ii) \quad f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in I \iff f \text{ ist monoton fallend.}$$

$$(iii) \quad f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in I \implies f \text{ ist streng monoton wachsend.}$$

$$(iv) \quad f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in I \implies f \text{ ist streng monoton fallend.}$$

BEISPIEL 1 Sei

$$v : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{A \cdot x}{k + x}$$

mit $A, k > 0$ (vgl. Beispiel 2.2.3). Dann ist

$$v'(x) = \frac{A \cdot (k + x) - A \cdot x \cdot 1}{(k + x)^2} = \frac{A \cdot k}{(k + x)^2} > 0 \quad \text{für alle } x \geq 0,$$

also ist v streng monoton wachsend.

Vorzeichenwechsel von f' geben Kriterien für Extrema :

HAUPTSATZ (1. Kriterium für lokale Extrema) *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es gelte $f'(x_1) = 0$ für ein $x_1 \in I$.*

(i) *Gibt es ein x_0 , so daß $f'(x) > 0$ für $x_0 < x < x_1$ und gibt es ein x_2 , so daß $f'(x) < 0$ für $x_1 < x < x_2$, dann ist $f(x_1) > f(x)$ für $x_0 < x < x_2$ mit $x \neq x_1$, d.h. f hat in x_1 ein lokales Maximum.*

(ii) *Gibt es ein x_0 , so daß $f'(x) < 0$ für $x_0 < x < x_1$ und gibt es ein x_2 , so daß $f'(x) > 0$ für $x_1 < x < x_2$, dann ist $f(x_1) < f(x)$ für $x_0 < x < x_2$ mit $x \neq x_1$, d.h. f hat in x_1 ein lokales Minimum.*

BEISPIEL 2 Sei

$$v : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{A \cdot x}{k + x + R \cdot x^2}$$

mit $A, k, R > 0$ (vgl. Beispiel 2.2.3). Dann ist

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{A \cdot (k + x + R \cdot x^2) - A \cdot x \cdot (1 + 2R \cdot x)}{(k + x + R \cdot x^2)^2} = \frac{A \cdot k - A \cdot R \cdot x^2}{(k + x + R \cdot x^2)^2} = \\ &= \frac{A \cdot (k - R \cdot x^2)}{(k + x + R \cdot x^2)^2}. \end{aligned}$$

Also ist $v'(x_1) = 0$ äquivalent zu

$$A \cdot (k - R \cdot x_1^2) = 0,$$

dann zu

$$x_1^2 = \frac{k}{R},$$

und somit zu

$$x_1 = \sqrt{\frac{k}{R}},$$

da $x_1 \geq 0$. Weiter gilt

$$v'(x) > 0 \quad \text{für } x \in [0, x_1[$$

und

$$v'(x) < 0 \quad \text{für } x \in]x_1, \infty[.$$

v hat also ein lokales (sogar absolutes) Maximum in x_1 und ist in den Teilintervallen $[0, x_1[$ und $]x_1, \infty[$ streng monoton wachsend bzw. fallend. Ferner nach Beispiel 5.5.3 ist $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0$ und es gilt $v(0) = 0$, $v'(0) = \frac{A}{k}$, sowie

$$v(x_1) = \frac{A \cdot \sqrt{\frac{k}{R}}}{k + \sqrt{\frac{k}{R}} + R \cdot \left(\sqrt{\frac{k}{R}}\right)^2} = \frac{A \cdot \sqrt{\frac{k}{R}}}{2k + \sqrt{\frac{k}{R}}} = \frac{A}{2\sqrt{kR} + 1}.$$

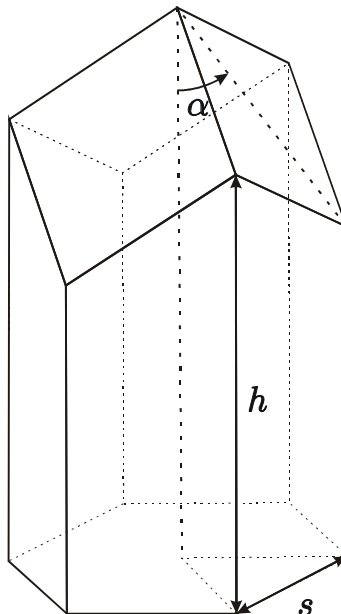
Damit sind alle wesentlichen Informationen über den Funktionsverlauf gegeben (vgl. Beispiel 2.2.3).

BEMERKUNG Die Untersuchung einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ enthält i.a. die folgenden Schritte :

- Berechnung der Ableitung.
- Bestimmung des $x_k \in I$ mit $f'(x_k) = 0$.
- Bestimmung des Vorzeichens von f' in den Intervallen $]x_k, x_{k+1}[$.
- Untersuchung des Verhaltens von f in den Randpunkten des Definitionsintervalls.

Zerfällt D_f in mehrere Teilintervalle, so ist f in jedem davon gesondert zu untersuchen.

BEISPIEL 3 Eine der bekanntesten Anwendung von Extremwertproblem ist die Untersuchung der Honigwabe der Biene. Die Wabenform ist durch die Angabe eines Winkels α beschreibbar. Der optimale Winkel, bei dem der Wachsverbrauch minimal ist, liegt nahe beim Mittelwert aus den gemessenen Werten, die eine Streuung um einige Grade aufweisen.



Die Oberfläche der Wabe ist durch

$$S(\alpha) = 6h \cdot s + \frac{3s^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

gegeben. Sie ist minimal für die Lösung α_1 der Gleichung $S'(\alpha_1) = 0$, d.h. von

$$0 = \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1 - (\sqrt{3} - \cos \alpha_1) \cdot \cos \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{1 - \sqrt{3} \cdot \cos \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1}$$

oder

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Somit ist

$$\alpha_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = 54.7 \dots^\circ \simeq 55^\circ.$$

Für mehr Information siehe Batschelet ¹, Beispiel 9.7.3, S. 238 und ff.

¹ Eduard Batschelet, *Einführung in die Mathematik für Biologen*, Springer, Berlin, 1980

6.4 Höhere Ableitungen

DEFINITION Ist die Ableitungsfunktion f' einer differenzierbaren Funktion f auch differenzierbar, so heißt f *zweimal differenzierbar* und

$$f'' := (f')'$$

die *zweite Ableitung* von f .

Das Vorzeichen von f'' ergibt weitere Informationen über den Funktionsverlauf, z.B.

SATZ Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

(i) Gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist die Steigung der Tangenten streng monoton wachsend, d.h. der Graph von f liegt oberhalb jeder Tangente. Insbesondere ist f **konvex**.

(ii) Gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$, dann ist die Steigung der Tangenten streng monoton fallend, d.h. der Graph von f liegt unterhalb jeder Tangente. Insbesondere ist f **konkav**.

Ähnliche Überlegungen führen zu

HAUPTSATZ (2. Kriterium für lokale Extrema) Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und es gebe ein $x_1 \in D_f$ mit $f'(x_1) = 0$. Dann gilt

(i) Ist $f''(x_1) > 0$, so besitzt f ein lokales Minimum in x_1 .

(ii) Ist $f''(x_1) < 0$, so besitzt f ein lokales Maximum in x_1 .

BEISPIEL Wird eine Droge zur Zeit $t = 0$ in einen Muskel injiziert und gelangt anschließend in die Blutbahn, so wird die Konzentration $f(t)$ für $t \geq 0$ annähernd durch

$$f(t) = c \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$$

mit Konstanten $b > a > 0$ und $c > 0$ gegeben.

Zur Bestimmung der lokalen Extrema berechnen wir

$$f'(t) = c \cdot (-a \cdot e^{-a \cdot t} + b \cdot e^{-b \cdot t}) = c \cdot e^{-b \cdot t} \cdot (-a \cdot e^{(b-a) \cdot t} + b).$$

Es ist genau dann $f'(t_1) = 0$, wenn

$$-a \cdot e^{(b-a) \cdot t_1} + b = 0$$

ist, d.h.

$$e^{(b-a) \cdot t_1} = \frac{b}{a} \quad (*)$$

oder

$$t_1 = \frac{1}{b-a} \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

Um festzustellen ob in diesem Punkt ein lokales Extremum vorliegt, berechnen wir

$$f''(t) = c \cdot (a^2 \cdot e^{-a \cdot t} - b^2 \cdot e^{-b \cdot t}) = c \cdot e^{-b \cdot t} \cdot (a^2 \cdot e^{(b-a) \cdot t} - b^2) .$$

Aus (*) folgt

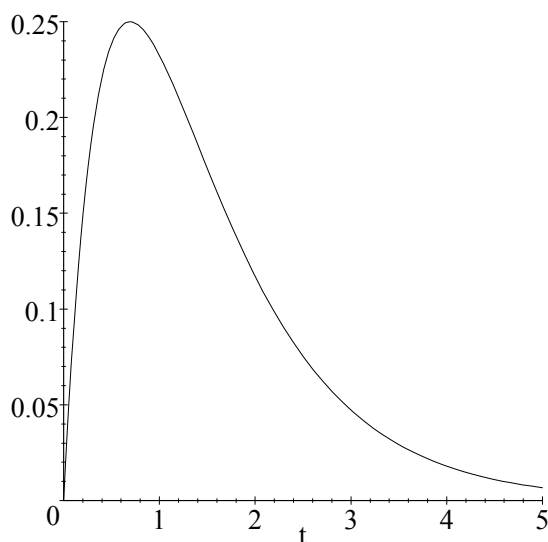
$$\begin{aligned} f''(t_1) &= c \cdot e^{-b \cdot t_1} \cdot (a^2 \cdot e^{(b-a) \cdot t_1} - b^2) = c \cdot e^{-\frac{b}{b-a} \cdot \ln \frac{b}{a}} \cdot \left(a^2 \cdot \frac{b}{a} - b^2 \right) = \\ &= c \cdot e^{-\frac{b}{b-a} \cdot \ln \frac{b}{a}} \cdot b \cdot (a - b) < 0 , \end{aligned}$$

da c , b und $e^{-\frac{b}{b-a} \cdot \ln \frac{b}{a}}$ alle > 0 sind, aber $a - b < 0$ ist. Damit hat f in t_1 ein lokales Maximum.

Man beachte, daß man

$$e^{-\frac{b}{b-a} \cdot \ln \frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a} \right)^{-\frac{b}{b-a}} = \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{b}{b-a}}$$

schreiben kann.



$$\begin{aligned} c &= 1 , a = 1 , b = 2 \\ t_1 &= \ln 2 \simeq 0.69 , f(t_1) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$